

Capitolo Primo

INSIEMI, APPLICAZIONI, RELAZIONI

§ 1. GLI INSIEMI

Alla base di una qualunque trattazione matematica c'è la nozione di *insieme*.

Noi assumeremo la nozione di insieme come *primitiva*, come si fa nella geometria elementare con le nozioni di punto, retta, piano, etc. Non daremo cioè una "definizione" di insieme, dato che, per farlo, avremmo bisogno di altri concetti che, a loro volta, andrebbero definiti, e così via.

Diremo dunque, alla buona, che un insieme è una *collezione* di oggetti detti gli *elementi* dell'insieme.

Per esprimere il fatto che un oggetto x è un elemento dell'insieme E , diremo che x *appartiene* ad E . In tal caso scriveremo

$$x \in E.$$

Naturalmente la scrittura $x \notin E$ sta ad indicare che l'oggetto x *non appartiene* all'insieme E , ossia che non è un suo elemento.

Se, per esempio, prendiamo come E l'insieme dei numeri naturali pari, possiamo dire che 0, 4, 120 appartengono ad E , mentre non gli appartengono 1, -6, π , la città di Trieste, la sedia su cui siamo seduti.

Assegnare un insieme significa assegnare i suoi elementi. Ne viene che per definire correttamente un insieme bisogna essere sempre in grado, almeno teoricamente, di decidere se un dato oggetto è o non è elemento del nostro insieme. Diciamo "teoricamente" perché, in pratica, la cosa può risultare difficile, se non addirittura impossibile.

Sia, per esempio, E l'insieme dei numeri naturali positivi primi, cioè maggiori di 1 e divisibili solo per 1 e per se stessi. Le cose sono tranquille, dato che per decidere se un elemento x appartiene ad E basta vedere se, in primo luogo è un numero naturale positivo, in secondo luogo se è un numero primo. Ora però non è così banale decidere se è o non è primo il numero naturale $12343^{847} + 98767^{51276} - 1$.

Possiamo dunque parlare dell'insieme dei numeri reali positivi *piccoli* solo dopo che abbiamo dato un criterio per decidere se un numero reale è o non è piccolo.

Un altro punto al quale bisogna prestare attenzione è quello di non prendere insiemi "troppo grandi" perché si rischia di creare delle contraddizioni (*antinomie*). Non si può, per esempio, parlare dell'insieme di *tutti gli insiemi* o cose simili. Dati i nostri scopi, non c'è però da preoccuparsi molto di queste cose difficili. Per stare tranquilli, ci basterà sempre pensare che gli insiemi e gli elementi di cui parliamo stanno tutti in un *insieme universo* U che potrà anche variare di volta in volta e che noi sottintenderemo sempre assegnato.

Di solito, ma non sempre, indicheremo gli insiemi con lettere maiuscole A, B, C, X, \dots e gli elementi con lettere minuscole a, b, c, x, \dots

Un primo modo per descrivere un insieme è quello di *elencare tutti* i suoi elementi raccogliendoli fra parentesi graffe. Per esempio: $E = \{a, b, c, d\}$. Ciò può essere fatto anche se l'insieme è infinito, quando la scrittura ottenuta è di chiara interpretazione. Per esempio, l'insieme dei numeri naturali pari può essere indicato con la scrittura $E = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$, o anche $E = \{2n: n = 0, 1, 2, \dots\}$, da leggersi " E uguale all'insieme dei numeri del tipo $2n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$ ".

A priori, non è necessario che gli elementi di un insieme abbiano una qualche proprietà in comune. Si può per esempio considerare l'insieme $E = \{3, \text{Roma, colore giallo}\}$. Tuttavia è chiaro che insiemi così strampalati saranno per noi di ben scarso interesse. Di solito ci interesseranno insiemi formati dagli elementi che godono di una data proprietà. Per definire l'insieme E formato dagli elementi x che godono della proprietà P , scriveremo

2 - Capitolo Primo

$$E = \{x: x \text{ ha la proprietà } P\},$$

o anche

$$E = \{x: P(x)\},$$

da leggersi " E uguale all'insieme degli x tali che $P(x)$ ".

Per esempio, l'insieme dei numeri naturali primi si potrà indicare scrivendo

$$E = \{x: x \text{ è un numero naturale primo}\}.$$

E ancora: dato un piano cartesiano, l'insieme dei punti $P(x,y)$ della circonferenza di centro l'origine O e raggio 2, potrà essere indicato con una scrittura del tipo

$$E = \{(x,y): x^2 + y^2 = 4\}.$$

Consideriamo ora l'insieme $E = \{x: x \neq x\}$. Questo insieme è chiaramente privo di elementi. Esso prende il nome di *insieme vuoto* e si indica con il simbolo \emptyset .

Sottolineiamo ancora il fatto che due insiemi A e B sono da riguardarsi come *uguali* ($A = B$) se e solo se sono *lo stesso insieme*, ossia se e solo se contengono gli stessi elementi. Dunque, per controllare l'uguaglianza dei due insiemi A e B , bisogna verificare che *ogni* elemento di A appartiene a B e che *ogni* elemento di B appartiene ad A .

Siano, per esempio, A l'insieme dei triangoli rettangoli e B l'insieme dei triangoli per i quali sussiste il Teorema di Pitagora. Risulta $A = B$. Infatti, come è ben noto, in ogni triangolo rettangolo vale il Teorema di Pitagora e, come è purtroppo molto meno noto, ogni triangolo in cui sussiste il Teorema di Pitagora è rettangolo.

Dati due insiemi A e B , se accade che ogni elemento di A è anche elemento di B , diremo che A è un *sottoinsieme* di B e, simmetricamente, che B è un *soprainsieme* di A . Diremo anche che A è *contenuto* in B e che B *contiene* A . Indicheremo questo fatto con una delle notazioni

$$A \subset B, \quad B \supset A.$$

Se A non è contenuto in B (in simboli: $A \not\subset B$), significa che *esiste almeno un* elemento x che appartiene ad A ma che non appartiene a B .

Per esempio, l'insieme A dei numeri naturali primi non è contenuto nell'insieme B dei numeri naturali dispari, dato che è $2 \in A$, ma $2 \notin B$.

Ovviamente, ogni insieme è contenuto in se stesso ($A \subset A$). Se è $A \subset B$, ma è $A \neq B$, cioè se ogni elemento di A appartiene a B , ma c'è almeno un elemento di B che non sta in A , si dice che A è un *sottoinsieme proprio* di B . Ciò si esprime con la notazione $A \subsetneq B$.

Per definizione, si ha $A = B$ se e solo se risulta $A \subset B$ e $B \subset A$.

È poi di immediata verifica che da $A \subset B$ e $B \subset C$ segue $A \subset C$.

Osserviamo ancora che, qualunque sia l'insieme A , si ha $\emptyset \subset A$. Infatti, se così non fosse, dovrebbe esistere un elemento x tale che $x \in \emptyset$ e $x \notin A$, ma la prima delle due condizioni è chiaramente impossibile.

N.B. Non si confondano i simboli \subset e \in . Il primo dei due esprime una relazione intercorrente tra due insiemi, mentre il secondo lega fra loro oggetti di natura diversa: elementi ed insiemi.

CONVENZIONE. Scriveremo qualche volta $\dots := \dots$ per dire che ciò che sta a sinistra dell'uguale è definito da ciò che sta a destra.

Dato un insieme E , ha senso considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi. Si pone cioè

$$\mathcal{P}(E) := \{A: A \subset E\}.$$

È dunque $A \in \mathcal{P}(E)$ se e solo se $A \subset E$.
Se, per esempio, $E = \{1, 2, 3\}$, si ha

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}.$$

§ 2. OPERAZIONI FRA INSIEMI

Come si è detto in precedenza, penseremo sempre gli insiemi di cui si parla come sottoinsiemi di un insieme universo U .

DEFINIZIONE. Dati due insiemi A e B , si chiama loro *intersezione* l'insieme formato da tutti e soli gli elementi che appartengono sia ad A che a B . Questo insieme si indica con il simbolo $A \cap B$. È dunque

$$A \cap B := \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Ricordiamo che il simbolo \wedge posto tra due affermazioni sta ad indicare che esse devono essere verificate entrambi; la frase può dunque essere letta " x tali che $x \in A$ e $x \in B$ ".

A volte semplificheremo la notazione scrivendo semplicemente $\{x: x \in A, x \in B\}$.

ESEMPLI. 1) Siano r ed s due rette di un piano pensate come insiemi di punti. La loro intersezione è l'insieme dei punti comuni. L'insieme $r \cap s$ consta dunque di un solo punto se le due rette sono incidenti, è l'insieme vuoto se r ed s sono parallele e distinte, coincide, in fine, con r se $r = s$.

2) L'insieme $E = \{x: x^2 - 4 < 0\}$ è dato dall'intersezione dei due insiemi $A = \{x: x > -2\}$ e $B = \{x: x < 2\}$.

Se è $A \cap B = \emptyset$, i due insiemi A e B sono detti fra loro *disgiunti*.
Si constata facilmente che è:

$$A \cap A = A; \quad A \cap B = B \cap A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$A \cap B \subset A; \quad A \cap B = A \text{ se e solo se } A \subset B.$$

Si può, naturalmente, fare l'intersezione anche di più di due insiemi. Per esempio, si ha

$$A \cap B \cap C := \{x: (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)\}.$$

E ancora: Per ogni numero naturale n , sia A_n un sottoinsieme dell'insieme universo U . Si ha

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n := \{x: x \in A_n, \text{ per ogni } n\}.$$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi A e B , si chiama loro *riunione* (o *unione*) l'insieme formato da tutti e soli gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B . Questo insieme si indica con il simbolo $A \cup B$. È dunque

$$A \cup B := \{x: x \in A \vee x \in B\}.$$

Nella lingua italiana, la " \vee " può avere almeno due significati diversi.

Significato *esclusivo* (latino *aut*), come nella frase: "Se sostengo un esame, o sono promosso o sono bocciato." (Le due cose non possono verificarsi entrambi.)

4 - Capitolo Primo

Significato *inclusivo* (latino *vel*), come nella frase: "Se a febbraio riesco a dare Analisi o Geometria, sono contento." (Se li dò tutti due, tanto meglio!)

In Matematica, salvo esplicito avviso del contrario, la "o" ha sempre quest'ultimo significato.

In luogo della "o", si usa anche il simbolo \vee . Dunque:

$$A \cup B := \{x: (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

ESEMPLI. 3) Siano A e B gli insiemi di numeri naturali formati, rispettivamente, dai multipli di 2 e dai multipli di 3. L'insieme $A \cup B$ è formato da tutti i numeri naturali pari e dai multipli dispari di 3. L'insieme $A \cap B$ è formato dai multipli di 6.

4) L'insieme $E = \{x: x^2 - 4 > 0\}$ è dato dall'unione dei due insiemi $A = \{x: x < -2\}$ e $B = \{x: x > 2\}$.

Si constata facilmente che è:

$$A \cup A = A; \quad A \cup B = B \cup A; \quad A \cup \emptyset = A;$$

$$A \cup B \supset B; \quad A \cup B = B \text{ se e solo se } A \subset B.$$

Si può, naturalmente, fare la riunione anche di più di due insiemi. Per esempio, si ha

$$A \cup B \cup C := \{x: (x \in A) \vee (x \in B) \vee (x \in C)\}.$$

E ancora: Per ogni numero naturale n , sia A_n un sottoinsieme dell'insieme universo U . Si ha

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n := \{x: x \in A_n, \text{ per almeno un } n\}.$$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi B e A , si chiama *insieme differenza* fra B e A , l'insieme

$$B \setminus A := \{x: (x \in B) \wedge (x \notin A)\}.$$

Se poi è $A \subset B$, l'insieme $B \setminus A$ si chiama *complementare di A rispetto a B* e lo si indica anche con $\complement_B A$. Il complementare di A rispetto all'insieme universo U si indica semplicemente con $\complement A$ o con \tilde{A} .

ESEMPLI. 5) Siano: A l'insieme dei numeri naturali pari; \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali e \mathbb{Z} l'insieme degli interi relativi. L'insieme $\complement_{\mathbb{N}} A$ è formato dai numeri naturali dispari, mentre l'insieme $\complement_{\mathbb{Z}} A$ è costituito dai numeri naturali dispari e dagli interi negativi.

6) Se \mathbb{Q} è l'insieme dei numeri razionali e se è $U = \mathbb{R}$ (= insieme dei numeri reali), allora $\complement \mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri irrazionali.

7) Siano: A l'insieme dei numeri naturali pari e B quello dei numeri primi. L'insieme $A \setminus B$ è costituito da tutti i numeri naturali pari diversi da 2.

Sono di immediata verifica le seguenti proprietà:

$$\complement \complement A = A; \quad \complement U = \emptyset; \quad \complement \emptyset = U;$$

$$A \cap \complement A = \emptyset; \quad A \cup \complement A = U.$$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi A e B , si chiama loro *insieme prodotto (cartesiano)*, e si indica con $A \times B$, l'insieme delle *coppie ordinate* (a, b) con a appartenente ad A e b appartenente a B ; in simboli:

$$A \times B := \{(a, b): (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

In particolare, l'insieme $A \times A := \{(a, b): (a \in A) \wedge (b \in A)\}$ si indica anche con A^2 .

Si può, naturalmente, definire anche il prodotto di 3 o più insiemi. Per esempio, si ha

$$A \times B \times C := \{(a, b, c): (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (c \in C)\}.$$

Com'è ben noto, l'insieme dei punti di una retta si può porre in corrispondenza biunivoca con l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali (coordinate cartesiane). Così i punti di un piano [dello spazio] si possono mettere in corrispondenza biunivoca con le coppie di numeri reali, ossia con \mathbb{R}^2 [con le terne di numeri reali, ossia con \mathbb{R}^3].

DEFINIZIONE. Sia E un insieme non vuoto e siano A_1, A_2, \dots, A_n sottoinsiemi di E . Diremo che gli insiemi A_1, A_2, \dots, A_n formano una *ripartizione* di E in n sottoinsiemi o *classi* se:

- 1) $A_i \neq \emptyset$ per ogni i ;
- 2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ se è $i \neq j$;
- 3) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$.

Ossia: gli A_i non sono vuoti e ogni x di E appartiene ad uno e uno solo dei sottoinsiemi dati. Questa definizione può essere facilmente estesa anche al caso di infiniti sottoinsiemi.

ESEMPLI. 8) Siano $E = \mathbb{N}$, $A = \{n; n \text{ è un numero pari}\}$, $B = \{n; n \text{ è un numero dispari}\}$. A e B formano una ripartizione di \mathbb{N} in 2 classi.

9) Sia E l'insieme dei punti di un piano. Le rette parallele ad una retta data formano una ripartizione di E in un numero infinito di classi.

10) Sia ancora $E = \mathbb{N}$. Si ponga ora: $A = \{n; n \text{ è un numero pari}\}$, $B = \{n; n \text{ è un numero primo}\}$, $C = \{n; n \text{ è un numero dispari non primo}\}$. Questi 3 insiemi non costituiscono una ripartizione di \mathbb{N} ; infatti, pur essendo $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$, si ha $A \cap B \neq \emptyset$.

Chiudiamo il paragrafo segnalando alcuni simboli che useremo molto spesso.

\forall sta al posto di "per ogni", "qualunque sia";

\exists sta al posto di "esiste";

$\exists!$ sta al posto di "esiste ed è unico", ossia "esiste uno e un solo".

Siano ora p e q due proposizioni.

La *negazione* di p si indica col simbolo $\neg p$ e si legge *non p*. Dunque $\neg p$ è vera se e solo se p è falsa. La proposizione $p \wedge q$ (*coniunzione*, da leggersi *p e q*) è vera se e solo se sono vere sia la p che la q . La proposizione $p \vee q$ (*disgiunzione*, da leggersi *p o q*) è vera se e solo se è vera la p o è vera la q , ossia se e solo se è vera almeno una delle due.

La proposizione $p \Rightarrow q$ (*implicazione*, da leggersi *p implica q*) è sempre vera, tranne nel caso che p sia vera e q falsa. Essa traduce il fatto che "se è vera p , allora è vera anche q " mentre, se p è falsa, non abbiamo alcuna pretesa su q . La proposizione $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ si indica con

6 - Capitolo Primo

$p \Leftrightarrow q$. La proposizione $p \Leftrightarrow q$ (che si legge *p coimplica q*) è vera se e solo se le proposizioni p e q sono entrambe vere o entrambe false.

Se la proposizione $p \Rightarrow q$ è vera, si dice che la p è condizione *sufficiente* per la q e che la q è condizione *necessaria* per la p .

Per esempio, fra numeri naturali, "essere multiplo di 4" è condizione sufficiente ma non necessaria per "essere pari".

Alcuni insiemi numerici vengono indicati con lettere particolari:

\mathbb{N}	:= insieme dei numeri <i>naturali</i> ;	\mathbb{N}^+	:= insieme dei numeri <i>naturali positivi</i> ;
\mathbb{Z}	:= insieme dei numeri <i>interi</i> ;	\mathbb{Z}^*	:= insieme dei numeri <i>interi non nulli</i> ;
\mathbb{Q}	:= insieme dei numeri <i>razionali</i> ;	\mathbb{Q}^+	:= insieme dei numeri <i>razionali positivi</i> ;
\mathbb{Q}^-	:= insieme dei numeri <i>razionali negativi</i> ;	\mathbb{R}	:= insieme dei numeri <i>reali</i> ;
\mathbb{R}^+	:= insieme dei numeri <i>reali positivi</i> ;	\mathbb{R}^-	:= insieme dei numeri <i>reali negativi</i> ;
\mathbb{C}	:= insieme dei numeri <i>complessi</i> ;	\mathbb{C}^*	:= insieme dei num. <i>complessi non nulli</i> .

§ 3. APPLICAZIONI

DEFINIZIONE. Dati due insiemi E ed E' , si chiama *applicazione* o *funzione* di E in E' ogni legge f che ad ogni elemento $x \in E$ associa un elemento $x' \in E'$. L'insieme E è detto il *dominio* della f , mentre E' è detto il suo *codominio*. Il fatto che ad ogni $x \in E$ debba corrispondere *un solo* elementi di E' si esprime dicendo che la legge f è *univoca*.

Per indicare che f è un'applicazione di E in E' useremo la notazione $f: E \rightarrow E'$. Per esprimere il fatto che la f associa all'elemento $x \in E$ l'elemento $x' \in E'$, si scrive $x' = f(x)$. L'elemento x' è detto l'*immagine* di x . Useremo qualche volta anche la notazione $x \mapsto x'$.

Si tenga ben presente che, per assegnare una funzione è necessario assegnare *tre* oggetti: il dominio, il codominio e la legge f .

ESEMPLI. 1) La legge $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ espressa da $f(n) = n - 1$ non definisce una funzione, dato che non esiste un corrispondente di 0. La stessa f definisce invece una funzione di \mathbb{Z} in \mathbb{Z} .

2) La legge $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ espressa da $f(x) = y$ se e solo se è $y^2 = x$ non definisce una funzione, dato che al numero 4 associa sia il 2 che il -2. Viene dunque a mancare l'univocità.

3) Le seguenti leggi definiscono invece delle applicazioni di \mathbb{R} in \mathbb{R} :

$$f(x) = 2; \quad f(x) = x^2; \quad f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}; \quad f(x) = \log(1 + x^2); \quad f(x) = \sin^2 x + \cos^3 x.$$

4) La legge $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ definisce un'applicazione dell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ in \mathbb{R} .

5) La legge che ad ogni circonferenza di un piano associa il suo centro definisce un'applicazione dell'insieme A delle circonferenze di quel piano nell'insieme B dei punti del piano stesso.

6) Sia A un insieme di persone nate in Italia. Anche la legge che ad ogni elemento di A associa il comune in cui è nato definisce un'applicazione di A nell'insieme B dei comuni italiani.

A noi interessano, in particolare, le applicazioni che hanno come codominio un insieme numerico; a tali applicazioni riserveremo, di regola, il nome di *funzioni*. In tal caso, all'elemento $f(x)$ si dà anche il nome di *valore* della f in x .

Sia data un'applicazione $f: E \rightarrow E'$. L'insieme $f(E) := \{f(x): x \in E\}$ ($\subset E'$) prende il nome di *insieme immagine* della f . È dunque $f(E) = \{x' \in E': \exists x \in E \text{ tale che } f(x) = x'\}$. Analogamente, se è $A \subset E$, si chiama *immagine* di A tramite la f l'insieme $f(A) := \{f(x): x \in A\}$.

Un'applicazione $f: E \rightarrow E'$ è detta *costante* se esiste $c' \in E'$ tale che $(\forall x \in E)(f(x) = c')$.

L'applicazione $f: E \rightarrow E$ definita da $f(x) = x$ è detta *applicazione identica* o *identità* di E .

Un'applicazione $f: \mathbb{N} \rightarrow E$ è detta *successione* di elementi di E . In luogo di $f(n)$ si usa più volentieri la notazione a_n ; la successione si indica con $(a_n)_n$.

Per esempio, la successione per cui è $(f(n) =) a_n = n^2$, si indica con $(n^2)_n$.

Si tenga ben presente che, in generale, ad un'applicazione non è richiesto né che sia $f(E) = E'$, né che ad elementi distinti di E vengano associati elementi distinti di E' .

DEFINIZIONE. Un'applicazione $f: E \rightarrow E'$ è detta *iniettiva* se ad elementi distinti di E vengano associati elementi distinti di E' , ossia se

$$(\forall x_1 \in E)(\forall x_2 \in E)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Ciò equivale a dire che, per ogni $x' \in E'$, esiste *al più* un $x \in E$ tale che $f(x) = x'$.

Per esempio, l'applicazione dell'Esempio 4 è iniettiva, mentre quelle degli Esempi 5 e 6 non lo sono.

DEFINIZIONE. Un'applicazione $f: E \rightarrow E'$ è detta *suriettiva* se l'insieme immagine $f(E)$ coincide con E' , ossia se

$$(\forall x' \in E')(\exists x \in E)(f(x) = x').$$

Ciò equivale a dire che, per ogni $x' \in E'$, esiste *almeno* un $x \in E$ tale che $f(x) = x'$.

Per esprimere il fatto che l'applicazione $f: E \rightarrow E'$ è suriettiva, si dice che f è un'applicazione di E su E' .

Per esempio, l'applicazione dell'Esempio 5 è suriettiva, mentre quella dell'Esempio 4 non lo è.

DEFINIZIONE. Un'applicazione $f: E \rightarrow E'$ è detta *biiettiva* se è iniettiva e suriettiva, ossia se

$$(\forall x' \in E')(\exists! x \in E)(f(x) = x').$$

Ciò equivale a dire che, per ogni $x' \in E'$, esiste *esattamente* un $x \in E$ tale che $f(x) = x'$.

Per esempio, è biiettiva l'applicazione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$.

DEFINIZIONE. Data l'applicazione $f: E \rightarrow E'$ e detto A un sottoinsieme di E , l'applicazione che a ogni elemento x di A associa l'elemento $f(x) \in E'$ è detta *restrizione* della f ad A ; essa si indica col simbolo $f|_A$ o, quando non c'è possibilità di equivoco, ancora con f .

Sia ancora $A \subset E$ e sia f un'applicazione di A in E' . ogni $f^*: E \rightarrow E'$ tale che $f^*|_A = f$ è detta un *prolungamento* della f ad E .

8 - Capitolo Primo

Sia per esempio data l'applicazione $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

Per ottenere un prolungamento della f a tutto \mathbb{R} , basta considerare una qualunque funzione $f_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_c(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \neq -1 \\ c, & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

DEFINIZIONE. Sia $f: E \rightarrow E'$ un'applicazione biiettiva. L'applicazione di E' in E che a ogni elemento x' di E' associa l'unico elemento $x \in E$ tale che $f(x) = x'$ è detta *applicazione inversa* della f ; essa si indica col simbolo f^{-1} . Dunque, per definizione, si ha

$$f^{-1}(x') = x \Leftrightarrow f(x) = x'.$$

Si tenga presente che, se la f non è biiettiva, non può esistere un'applicazione inversa. Tuttavia, è spesso utile costruire una funzione imparentata con la f che risulti invece invertibile.

Se la f non è suriettiva, per renderla tale basta sostituire ad E' il suo sottoinsieme $f(E)$. Se la f non è iniettiva, per renderla tale si può considerare un'opportuna restrizione. Abbinando i due procedimenti, si ottiene un'applicazione biiettiva che è, per così dire, strettamente imparentata con quella di partenza.

ESEMPLI. 7) L'applicazione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non è biiettiva. Per ottenere un'applicazione biiettiva, si restringe la f all'insieme $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e si assume quest'ultimo insieme anche come codominio. Insomma la funzione x^2 non è biiettiva fra \mathbb{R} e \mathbb{R} , ma lo è fra $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. L'inversa della funzione $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definita da $f(x) = x^2$ è la funzione *radice quadrata*.

8) L'applicazione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x$ non è biiettiva. Per ottenere un'applicazione biiettiva, si assume come codominio l'intervallo $J = \{y: -1 \leq y \leq 1\}$ e si restringe la f all'intervallo $I = \{x: -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$. Naturalmente, questa restrizione non è l'unica possibile, ma è la più naturale. L'inversa della funzione $f: I \rightarrow J$, definita da $f(x) = \sin x$ è la funzione *arco seno*.

Sia data un'applicazione $f: E \rightarrow E'$ e sia A' un sottoinsieme di E' . Si chiama *controimmagine* di A' il sottoinsieme $f^{-1}(A')$ di E definito da $f^{-1}(A') := \{x \in E: f(x) \in A'\}$.

ESEMPIO. 9) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Si ha:

$$f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}; \quad f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f^{-1}(\{x': -1 < x' \leq 9\}) = \{x: -3 \leq x \leq 3\}; \quad f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset.$$

Non si confonda la controimmagine con l'applicazione inversa. Quest'ultima opera sugli *elementi* di E' e ha senso solo se la f è biiettiva, mentre la controimmagine opera sui *sottoinsiemi* di E' e si può definire in ogni caso.

Sia ancora $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Sappiamo che questa funzione non è invertibile. Non ha dunque senso scrivere $f^{-1}(4)$, mentre si è visto che è $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$.

DEFINIZIONE. Siano date le due applicazioni $f: E \rightarrow E'$ e $g: E' \rightarrow E''$. Si può costruire un'applicazione $h: E \rightarrow E''$ ponendo $h(x) := g(f(x))$, $\forall x \in E$. L'applicazione h è detta applicazione *composta* della f e della g ; essa si indica col simbolo $g \circ f$.

ESEMPLI. 10) Siano: $E = \mathbb{R}^+$, $E' = E'' = \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log x$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(u) = -u^2$. L'applicazione composta $h = g \circ f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è definita da $h(x) = -\log^2 x$.

Si badi che, in questo caso, non è definita un'applicazione che si possa indicare con $f \circ g$. Infatti questa dovrebbe essere un'applicazione k definita da $k(u) = \log(-u^2)$ che non ha senso.

11) Siano: $E = E' = E'' = \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + 1$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(u) = u^2$. In questa situazione, esistono sia la funzione composta $g \circ f$ sia la $f \circ g$. Si ha:

$$(g \circ f)(x) = (x + 1)^2 \text{ e } (f \circ g)(x) = x^2 + 1.$$

Se ne deduce che, in generale, è $g \circ f \neq f \circ g$.

11) Siano: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 - x^2$ e $g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(u) = \sqrt{u}$. Non esiste l'applicazione composta $g \circ f$, dato che la f assume anche valori negativi. Si può però comporre con la g la restrizione della f al sottoinsieme $A (\subset \mathbb{R})$ formato dagli x per cui è $1 - x^2 \geq 0$, ossia agli x per cui è $-1 \leq x \leq 1$. L'applicazione composta $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ è definita da $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

DEFINIZIONE. Data l'applicazione $f: E \rightarrow E'$, l'insieme $G(f) := \{(x, f(x)): x \in E\}$ ($\subset E \times E'$) è detto *grafico* di f .

Un sottoinsieme G di $E \times E'$ è il grafico di una funzione se e solo se

$$(\forall x \in E)(\exists! x' \in E')((x, x') \in G).$$

Posto, per esempio, $I = \{x: -1 \leq x \leq 1\}$, l'insieme $H = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ ($\subset I \times I$) non è il grafico di una funzione dato che, appartengono ad H sia $(0, -1)$ sia $(0, 1)$. Se però si considera l'insieme $H' = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ ($\subset I \times I$), questo è il grafico della funzione $f: I \rightarrow I$ definita da $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

§ 4. RELAZIONI BINARIE

DEFINIZIONE. Si chiama *relazione binaria* in un insieme non vuoto E ogni applicazione R di $E \times E$ nell'insieme $\{sì, no\}$. Per esprimere il fatto che per una coppia (x, y) di $E \times E$ è $R(x, y) = sì$ [*no*], si dice che gli elementi x e y di E sono in relazione [*non sono in relazione*].

Per assegnare una relazione R su un insieme E basta ovviamente fissare il sottoinsieme $R^{-1}(\{sì\})$. Spesso, in luogo delle parole "sì", "no", si usano più volentieri i numeri "1" e "0". Inoltre, invece di scrivere $R(x, y) = 1$; si usa interporre fra x e y un segno particolare. Per esprimere una relazione generica useremo il segno \dashv . Alcune relazioni hanno un loro segno usuale: $=$, \parallel , \leq , \perp , \subset , etc.

10 - Capitolo Primo

Per esprimere il fatto che nell'insieme E è definita la relazione \sqsubset , si usa la scrittura (E, \sqsubset) .

ESEMPI DI RELAZIONI. 1) Uguaglianza fra gli elementi di un insieme ($=$).

2) Inclusione fra i sottoinsiemi di un insieme (\subset).

3) Parallelismo fra le rette di un piano o dello spazio (\parallel).

4) Ortogonalità fra le rette di un piano (\perp).

5) Relazione di "minore o uguale" fra numeri reali (\leq).

6) Relazione di "minore" fra numeri reali ($<$).

7) Relazione di divisibilità fra numeri naturali positivi (\triangleleft).

8) Relazione "essere fratello di" (nel senso di avere in comune almeno un genitore) in un insieme di persone.

9) Relazione "distare meno di 100 km" in un insieme di città.

Una relazione \sqsubset in un insieme E può godere di alcune proprietà.

– **Proprietà riflessiva:** $(\forall x \in E)(x \sqsubset x)$, cioè "ogni elemento di E è in relazione con se stesso".

Le relazioni precedenti sono tutte riflessive, tranne quelle degli esempi (4) e (6).

– **Proprietà simmetrica:** $(\forall x \in E)(\forall y \in E)(x \sqsubset y \Rightarrow y \sqsubset x)$; cioè "se x è in relazione con y , allora anche y è in relazione con x ".

Le relazioni degli esempi (1), (3), (4), (8) e (9) sono simmetriche, le altre no.

– **Proprietà antisimmetrica:** $(\forall x \in E)(\forall y \in E)[(x \sqsubset y) \wedge (y \sqsubset x) \Rightarrow x = y]$; cioè "se x è in relazione con y e y è in relazione con x , allora $x = y$ ".

Le relazioni degli esempi (1), (2), (5), (6) e (7) sono antisimmetriche, le altre no.

L'uguaglianza è l'unica relazione che è al tempo stesso simmetrica e antisimmetrica.

– **Proprietà transitiva:** $(\forall x \in E)(\forall y \in E)(\forall z \in E)[(x \sqsubset y) \wedge (y \sqsubset z) \Rightarrow x \sqsubset z]$; cioè "se x è in relazione con y e y è in relazione con z , allora x è in relazione con z ".

Le relazioni precedenti sono tutte transitive, tranne quelle degli esempi (4), (8) e (9).

Accenniamo solo al fatto che, come si parla di relazioni binarie, si può parlare anche di relazioni ternarie, quaternarie, ..., cioè di relazioni che coinvolgono 3, 4, ... elementi di un insieme.

Sia E l'insieme dei punti di un piano. Un esempio di relazione fra terne di elementi di E è quella di "essere allineati". Un esempio di relazione fra quaterne di elementi di E è quella di "appartenere ad una medesima circonferenza".

La nozione di relazione binaria su un insieme E ammette una facile generalizzazione. Dati due insiemi E ed E' si chiamerà relazione binaria fra gli elementi di E e quelli di E' ogni applicazione di $E \times E'$ in $\{1, 0\}$.

Se per esempio è $E' = \mathcal{P}(E)$, una relazione fra E ed E' è quella di appartenenza.

Noi ci occuperemo esclusivamente di relazioni binarie su un insieme E . Anzi ci limiteremo a due tipi particolari di queste: le relazioni di equivalenza e quelle d'ordine.

§ 5. RELAZIONI DI EQUIVALENZA

DEFINIZIONE. Si chiama (*relazione di*) *equivalenza* in un insieme non vuoto E ogni relazione binaria su E che sia *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*.

Data un'equivalenza su un insieme E , diremo che due elementi a e b in relazione sono fra loro *equivalenti*; esprimeremo il fatto scrivendo $x \sim y$.

L'uguaglianza è chiaramente un'equivalenza che viene detta equivalenza *discreta*.

Diamo qualche altro esempio di equivalenza.

ESEMPLI. 1) Il parallelismo fra rette o fra piani.

2) Sia $E = \{(p, q): p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$; dunque E è l'insieme di tutte le frazioni. In E si definisce la ben nota relazione di equivalenza $(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow ps = qr$.

3) La relazione di congruenza fra i segmenti dello spazio.

4) In un insieme di persone, la relazione "*essere fratelli*", ma nel senso di avere uguali entrambi i genitori.

5) Fra numeri reali: $x \sim y$ se e solo se $x - y$ è un multiplo intero di 2π .

6) Fra numeri reali: $x \sim y$ se e solo se $x - y$ è un numero intero.

7) Dato un insieme non vuoto E , si dichiarino fra loro equivalenti tutti gli elementi di E . Si ottiene una relazione di equivalenza detta equivalenza *nulla*.

DEFINIZIONE. Sia \sim un'equivalenza in un insieme E . Per ogni $x \in E$ si definisce

$$[x] := \{y \in E: x \sim y\}.$$

I sottoinsiemi $[x]$ prendono il nome di *classi* dell'equivalenza data.

TEOREMA 1. Sia \sim un'equivalenza in un insieme E .

1) Per ogni $x \in E$, si ha $[x] \neq \emptyset$.

2) Si ha $[x] = [y]$ se e solo se $x \sim y$.

3) Se $x \not\sim y$, si ha $[x] \cap [y] = \emptyset$.

4) Le classi dell'equivalenza costituiscono una ripartizione di E .

DIM. 1) Essendo $x \sim x$, si ha $x \in [x]$.

2) Sia $x \sim y$. Da $z \in [x]$ segue $x \sim z$, da cui $z \sim x \sim y$ e quindi $z \sim y$, ossia $y \sim z$ e, in fine, $z \in [y]$. L'inclusione opposta si prova allo stesso modo.

Sia ora $[x] = [y]$. È dunque $y \in [x]$, da cui $x \sim y$.

3) Sia $x \not\sim y$ e supponiamo, per assurdo, che esista $z \in [x] \cap [y]$. Si ottiene: $(x \sim z) \wedge (y \sim z)$, da cui $x \sim z \sim y$ e, in fine, $x \sim y$. Assurdo.

4) Basta osservare che ogni elemento di E appartiene a una e una sola classe dell'equivalenza. ■

DEFINIZIONE. Sia data su un insieme E un'equivalenza \sim . L'insieme $\{[x]: x \in E\}$ ($\subset \mathcal{P}(E)$) delle classi di equivalenza prende il nome di *insieme quoziente* di E rispetto all'equivalenza data. Esso si indica con E / \sim .

Passare da E a E / \sim comporta il riguardare certi sottoinsiemi di E come elementi di un nuovo insieme. Spesso in matematica si dà un nome a questi nuovi elementi. Tale procedimento prende il nome di *definizione per astrazione*.

ESEMPLI. 8) Sia E l'insieme delle rette dello spazio e sia \sim la relazione di parallelismo. Agli elementi di E / \sim si dà il nome di *direzioni*.

9) Sia E l'insieme dei piani dello spazio e sia \sim ancora la relazione parallelismo. Agli elementi di E / \sim si dà il nome di *giaciture*.

12 - Capitolo Primo

10) Nell'insieme $E = \{(p, q): p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$ di tutte le frazioni sia \sim l'equivalenza definita da $(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow ps = qr$. Agli elementi di E / \sim si dà il nome di *numeri razionali*.

11) Sia E l'insieme dei segmenti dello spazio e sia \sim la relazione di congruenza. Agli elementi di E / \sim si dà il nome di *lunghezze*.

12) Sia E l'insieme dei segmenti orientati dello spazio e sia \sim la relazione che proclama equivalenti due segmenti se e solo se sono congruenti e hanno uguali anche direzione e verso. Agli elementi di E / \sim si dà il nome di *vettori*.

§ 6. RELAZIONI D'ORDINE

DEFINIZIONE. Si chiama *relazione d'ordine* o *ordinamento* in un insieme non vuoto E ogni relazione binaria su E che sia *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva*.

Se a è in relazione con b diremo che a *precede* b [che b *segue* a] e scriveremo, per esempio, $a \leq b$ [$b \geq a$].

ESEMPLI. 1) La relazione d'inclusione in $\mathcal{P}(E)$.

2) La relazione " \leq " in \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} .

3) La relazione di divisibilità fra numeri naturali positivi definita da $a \triangleleft b$ se e solo se a è un divisore di b .

Data in un insieme E una relazione d'ordine \leq , si può definire una nuova relazione, in certo qual modo equivalente (cioè con lo stesso grado di informazione) a quella data, ponendo $a < b$ se e solo se è $(a \leq b) \wedge (a \neq b)$.

Il caso più interessante è quello in cui si parte dalla relazione \leq fra numeri (in particolare in \mathbb{N}) ottenendo così l'usuale relazione di $<$.

Una relazione $<$ gode delle seguenti proprietà:

1) Prop. *antiriflessiva*: $(\forall x \in E) (x \not< x)$, cioè nessun elemento è in relazione con se stesso.

2) Prop. *antisimmetrica*. In virtù della (1), essa diviene: $(\forall x \in E)(\forall y \in E)(x < y \Rightarrow y \not< x)$.

3) Proprietà *transitiva*: $(\forall x \in E)(\forall y \in E)(\forall z \in E)((x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow x < z)$.

A una tale relazione si dà il nome di *relazione d'ordine in forma antiriflessiva*.

Viceversa, partendo da una relazione d'ordine in forma antiriflessiva $<$, si ottiene una relazione d'ordine riflessiva \leq ponendo $a \leq b$ se e solo se è $(a < b) \vee (a = b)$.

Sia (E, \leq) un insieme ordinato. Se accade che comunque si fissino due elementi a, b di E si ha $(a \leq b) \vee (b \leq a)$, si dice la relazione è di ordine *totale*. Se invece esistono almeno due elementi a e b fra loro *inconfrontabili*, ossia tali che non risulti né $a \leq b$ né $b \leq a$, si parla di ordinamento *parziale*.

Per esempio, l'insieme $(\mathcal{P}(E), \subset)$ è totalmente ordinato se e solo se E non contiene più di un elemento. Infatti, se in E esistono due elementi a e b , si ha $\{a\} \not\subset \{b\}$ e $\{b\} \not\subset \{a\}$.

La relazione \leq in \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} è d'ordine totale.

Naturalmente, un sottoinsieme X di un insieme parzialmente ordinato U può risultare totalmente ordinato. Per esempio, sappiamo che se è $E = \{a, b, c\}$, l'insieme $(\mathcal{P}(E), \subset)$ è parzialmente ordinato; per contro, il suo sottoinsieme $X = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, E\}$ è totalmente ordinato.

DEFINIZIONE. Sia (E, \leq) un insieme ordinato. Si dice che un elemento $m \in E$ è il *primo* o il *minimo* elemento di E se m precede tutti gli elementi di E . Scriveremo $m = \min E$.

Analogamente, si dice che un elemento $M \in E$ è l'*ultimo* o il *massimo* elemento di E se M segue tutti gli elementi di E . Scriveremo $M = \max E$.

Qualunque sia l'insieme non vuoto E , l'insieme $(\mathcal{P}(E), \subset)$ ha un minimo ($m = \emptyset$) e un massimo ($M = E$). L'insieme (\mathbb{N}, \leq) ha minimo, lo zero, ma non ha massimo. In (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{Q}, \leq) , (\mathbb{R}, \leq) non c'è né minimo né massimo.

TEOREMA 2. Se in un insieme ordinato (E, \leq) esiste minimo [massimo] esso è unico.

DIM. Se m e m' sono minimi di E , si ha $(m \leq m') \wedge (m' \leq m)$, da cui $m = m'$. Analogamente per il massimo. ■

DEFINIZIONE. Siano (E, \leq) un insieme ordinato e A un sottoinsieme di E . Se esiste un elemento $L \in E$ che segue tutti gli elementi di A , si dice che L è una *limitazione superiore* o un *maggiorante* di A . In tal caso si dice che A è un sottoinsieme *superiormente limitato* di E .

Analogamente, se esiste un elemento $l \in E$ che precede tutti gli elementi di A , si dice che l è una *limitazione inferiore* o un *minorante* di A . In tal caso si dice che A è un sottoinsieme *inferiormente limitato* di E .

Un sottoinsieme A di E è detto *limitato* se ammette sia limitazioni inferiori che superiori.

Siano (E, \leq) un insieme ordinato e A un sottoinsieme superiormente limitato di E . Se L è una limitazione superiore di A , ogni elemento L' che segua L è ancora una limitazione superiore di A . Interessa vedere se fra le limitazioni superiori di A ce n'è una minima.

DEFINIZIONE. Siano (E, \leq) un insieme ordinato e A un sottoinsieme superiormente limitato di E . Se l'insieme delle limitazioni superiori di A ha minimo, questo è detto l'*estremo superiore* di A ed è indicato col simbolo $\sup A$.

Analogamente: Se A è un sottoinsieme inferiormente limitato di E e se l'insieme delle limitazioni inferiori di A ha massimo, questo è detto l'*estremo inferiore* di A ed è indicato col simbolo $\inf A$.

ESEMPL. 4) Sia $(\mathbb{N}^+, <)$ l'insieme dei numeri naturali positivi ordinato per divisibilità. Se A è un suo sottoinsieme finito, allora esso è superiormente limitato ed ammette anche estremo superiore dato dal minimo comune multiplo dei suoi elementi. Se A è infinito, esso è superiormente illimitato.

Un qualunque sottoinsieme non vuoto A è inferiormente limitato (da 1) ed ha estremo inferiore dato dal massimo comune divisore dei suoi elementi.

5) Consideriamo l'insieme $(\mathbb{Q}; \leq)$. Sia ora $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < 2\}$. Si vede subito che A è superiormente limitato (per es. da 2) ma che non ha estremo superiore.

Posto invece $B = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < 4\}$, si ha $\sup B = 2$.

Dunque, non tutti i sottoinsiemi superiormente limitati di \mathbb{Q} hanno estremo superiore. Vedremo che nell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali le cose vanno altrimenti.

Chiaramente, se un sottoinsieme A di (E, \leq) ha massimo, questo è anche l'estremo superiore di A . Il caso dell'insieme B dell'Esempio 5 mostra che l'estremo superiore di un insieme può ben non appartenergli. Anzi, l'estremo superiore si inventa proprio come "surrogato" del massimo.

§ 7. ESERCIZI

1) Detto U l'insieme dei primi 20 numeri naturali positivi, si considerino i suoi sottoinsiemi: $A = \{2k: k = 1, 2, \dots, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{3k: k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si descrivano gli insiemi:

$$A \cap B; A \cup B; A \cap \bar{B}; A \cup \bar{B},$$

$$(A \cap B) \cap C; A \cap (B \cap C); (A \cup B) \cup C; A \cup (B \cup C);$$

$$(A \cap B) \cup C; (A \cup C) \cap (B \cup C); (A \cup B) \cap C; (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

$$\bar{A}; \bar{B}; \bar{(A \cap B)}; \bar{A} \cup \bar{B}; \bar{(A \cup B)}; \bar{A} \cap \bar{B}.$$

2) Si dimostri che sussistono le seguenti proprietà:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (\text{prop. associative})$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C); \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (\text{prop. distributive})$$

$$\bar{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}; \quad \bar{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (\text{formule di De Morgan}).$$

[Si può procedere così: Si fissa un $x \in U$ e ci si chiede: « $x \in A$?», « $x \in B$?», « $x \in C$?». In base alle risposte, ci sono 8 casi possibili se gli insiemi coinvolti sono 3, 4 casi se gli insiemi sono solo 2. Per ciascuno di essi si controlla che x appartiene al primo insieme se e solo se appartiene al secondo. Occupiamoci, per esempio, della prima formula di De Morgan.

A	B	$A \cap B$	$\bar{(A \cap B)}$	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A} \cup \bar{B}$
sì	sì	sì	no	no	no	no
sì	no	no	sì	no	sì	sì
no	sì	no	sì	sì	no	sì
no	no	no	sì	sì	sì	sì

Per concludere, basta confrontare le colonne ombreggiate della tabella.]

3) Dati due insiemi A e B si chiama loro *differenza simmetrica* l'insieme $A \Delta B$ formato dagli elementi che appartengono ad uno e uno solo degli insiemi A e B . È dunque

$$A \Delta B := \{x: x \in A \text{ aut } x \in B\} = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}).$$

Considerati gli insiemi di cui all'Esercizio 1, si descrivano gli insiemi:

$$A \Delta B; A \Delta A; A \Delta U; A \Delta \emptyset; (A \Delta B) \Delta C; A \Delta (B \Delta C).$$

4) Si dimostri che sussistono le seguenti proprietà:

$$A \Delta B = B \Delta A; A \Delta A = \emptyset; A \Delta U = \bar{A}; A \Delta \emptyset = A;$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

[Si può procedere con la stessa tecnica suggerita per l'Esercizio 2.]

5) Si individuino graficamente i seguenti insiemi di punti del piano riferito a coordinate cartesiane:

$$\{(x, y): x \leq 0\}; \quad \{(x, y): x \leq 1, y \leq 1\}; \quad \{(x, y): |x| \leq 1\}; \quad \{(x, y): x = y\};$$

$$\{(x, y): x \leq y\}; \quad \{(x, y): |x| + |y| \leq 1\}; \quad \{(x, y): |x - y| \leq 1\};$$

$$\{(x, y): x^2 + y^2 > 1\}; \quad \{(x, y): (x > 1) \vee (y > 1)\}.$$

6) Posto $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, si ricerchino i suoi sottoinsiemi X soddisfacenti alle seguenti condizioni:

$$(a) \begin{cases} X \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 6\} \\ X \cap \{1, 2\} \supset \{1\} \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} X \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{3, 4\} \\ X \cap \{2, 4, 5, 6\} = \{2, 6\} \end{cases};$$

$$a) \begin{cases} X \cap \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 4\} \\ X \cap \{2, 5, 6\} \subset \{2, 6\} \\ X \cap \{2, 4, 6\} \subset \{1, 3, 5\} \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} X \cap \{3, 4, 5\} \supset \{4, 5\} \\ X \cap \{1, 2, 6\} \supset \{2, 6\} \end{cases}.$$

[Anche in questo caso, si può utilizzare una tabella analoga a quella vista in precedenza. Occupiamoci del problema (a).]

Elemento	Prima condizione	Seconda condizione	Conclusioni
1	—	Sì	sì
2	—	—	—
3	no	—	no
4	no	—	no
5	no	—	no
6	sì	—	sì

Il trattino indica che la cosa è indifferente. Ci sono dunque due soluzioni: $X_1 = \{1, 6\}$ e $X_2 = \{1, 2, 6\}$.

7) (a) Si provi, mediante esempi, che da $A \cap B = A \cap C$ non segue $B = C$.

(b) Si provi, mediante esempi, che da $A \cup B = A \cup C$ non segue $B = C$.

(c) Si dimostri che, invece, da $(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C)$ segue $B = C$.

[(c) Sia $x \in B$. Se è $x \in A$, è anche $x \in A \cap B = A \cap C$, da cui $x \in C$. Sia $x \notin A$; essendo comunque $x \in A \cup B = A \cup C$, si ottiene ancora $x \in C$. Analogamente si prova che è $C \subset B$.]

8) Date le seguenti coppie di funzioni f e g di \mathbb{R} in \mathbb{R} , si definiscano le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

$$f(x) = 1 - 3x; \quad g(x) = x - 2; \quad f(x) = x^2 + 1; \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1};$$

$$f(x) = 3x; \quad g(x) = \sin x; \quad f(x) = 3x + 2; \quad g(x) = 2x - 4.$$

16 - Capitolo Primo

9) Data un'applicazione $f: E \rightarrow E'$, siano A, B sottoinsiemi di E e A', B' sottoinsiemi di E' . Si provi che:

- (a) Da $A \subset B$ segue $f(A) \subset f(B)$. (b) Da $A' \subset B'$ segue $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$.
 (c) Si ha $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. (d) Si ha $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
 (e) Si ha $A \subset f^{-1}(f(A))$; (f) Si ha $f(f^{-1}(A')) = A' \cap f(E)$.

[(a) Sia $x' \in f(A)$; esiste $x \in A$ tale che $f(x) = x'$; essendo anche $x \in B$, segue $f(x) = x' \in f(B)$.]

(d) Essendo $A \cap B \subset A$, la tesi segue dalla (a); in generale non sussiste l'uguaglianza; questa si ha se e solo se la f è iniettiva.]

10) Si esprima il termine n -imo a_n delle seguenti successioni a valori razionali (ossia delle seguenti applicazioni $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{Q}$):

$$\begin{array}{lll} 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots & 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots & \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \dots \\ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots & 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots & 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \dots \\ 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, \dots & & \end{array}$$

[Per l'ultima successione, si può porre $a_n = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{3}n)$.]

11) Per ciascuna delle seguenti relazioni binarie definite in \mathbb{N}^+ , si dica se è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva. Sia dunque $a \vdash b$ se e solo se

- (a) $b = a + 1$; (b) a è un divisore proprio di b ; (c) a e b sono entrambi maggiori di 1;
 (d) a e b sono uguali o consecutivi; (e) nessuno dei due numeri è multiplo dell'altro;
 (f) a e b sono primi fra loro; (g) il massimo comun divisore di a e b è uguale a 3.

12) Si descriva l'insieme quoziente E / \sim nel caso dell'equivalenza discreta e nel caso dell'equivalenza nulla.

13) Sia \mathcal{F} l'insieme delle applicazioni di un insieme E in un insieme E' . Si provi che è un'equivalenza in \mathcal{F} la relazione binaria definita da $f \sim g$ se e solo se è finito l'insieme

$$A = \{x \in E: f(x) \neq g(x)\}.$$

14) Può accadere che in un insieme ordinato (E, \leq) il minimo coincida col massimo?

15) Sia $(\mathbb{N}^+, \triangleleft)$ l'insieme dei numeri naturali positivi ordinato per divisibilità. Si dica quali dei suoi seguenti sottoinsiemi sono totalmente ordinati:

$$\begin{array}{lll} \{2n: n = 1, 2, 3, \dots\}; & \{n^2: n = 1, 2, 3, \dots\}; & \{2^n: n = 1, 2, 3, \dots\}; \\ \{6^n: n = 0, 1, 2, \dots\}; & \{n!: n = 1, 2, 3, \dots\}; & \{n: n \text{ è un numero primo}\}. \end{array}$$

16) In un insieme E di persone, sia $a \vdash b$ se e solo se a è più giovane di b . Si tratta di una relazione d'ordine?